E.N.S.I.

1984

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 h 30

PARTIE I

Question 1.

Étudier la suite réelle $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_i = 4 - \dfrac{1}{a_{i-1}} \qquad i > 1 \end{cases}$$

Question 2.

Calculer (en précisant les moyens et méthodes de calcul) les valeurs décimales des 15 premiers termes de cette suite.

Commenter les résultats.

Question 3.

Soient les applications E et Tronc définies par :

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longrightarrow E(x) = \text{partie entière de } x. \\ \text{Tronc} : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longrightarrow \text{Tronc}(x) = 10^{-2} E(10^2 x) \end{aligned}$$

Considérons alors la suite $(\tilde{a}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} \tilde{a}_1 = 2 \\ \tilde{a}_i = 4 - \text{Tronc}\left(\dfrac{1}{\tilde{a}_{i-1}}\right) \quad (i > 1) \end{cases}$$

Étudier cette suite (on pourra d'abord en calculer quelques termes).

Comparer les suites $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ et $(\tilde{a}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.

.../...

Question 4.

Soit le système d'équations linéaires donné sous la forme matricielle : $Ax = b$,

où :

$x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ désigne un vecteur inconnu de $\mathbb{R}^n$,

$b = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ désigne un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$,

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ désigne la matrice d'ordre n suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Considérons d'autre part les n systèmes d'équations linéaires à n équations et n inconnues :

$$A^i x = b^i \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$A^i = \begin{bmatrix} d_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & d_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 4 & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b^i = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

a. Déterminer les valeurs de d_1 et r_1, puis pour chaque i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ les relations qui expriment d'une part d_{i+1} en fonction de d_i, d'autre part r_{i+1} en fonction de b_{i+1}, r_i et d_i de telle sorte que :

- $A^1 = A$, $\quad b^1 = b$;
- pour $i = 1, \ldots, n-1$, le système d'équations $A^{i+1} x = b^{i+1}$

se déduise de $A^i x = b^i$ par combinaison linéaire des lignes $i+1$ et i, les deux systèmes ayant même ensemble de solutions.

b. Exprimer x_i en fonction de d_i, r_i et éventuellement x_{i+1}.

c. Proposer, à partir de ce qui précède, une méthode de résolution du système $Ax = b$.

.../...

Question 5.

On note : $n = 11$ et

$$b = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}4 \\ 0{,}8 \\ 1{,}2 \\ 1{,}6 \\ 2 \\ 2{,}4 \\ 2{,}8 \\ 3{,}2 \\ 3{,}6 \\ 1{,}9 \end{bmatrix}$$

Résoudre le système $A\,x = b$ en précisant les moyens de calcul utilisés. De plus, il est demandé :

— de présenter dans un tableau les nombres calculés d_i, r_i et x_i;

— de donner les résultats avec 6 décimales si une machine à calculer est utilisée; dans le cas contraire, d'effectuer exactement les sommes et soustractions et de remplacer le résultat des multiplications et divisions par leur image par l'application « Tronc ».

Partie II

Soient :

$$\Phi_0(t) = t^2(2t - 3) + 1$$
$$\Phi_2(t) = t(t - 1)^2$$

Question 6.

Tracer les représentations graphiques, dans un repère orthonormé, des restrictions de Φ_0 et Φ_2 à l'intervalle $[0, 1]$.

Question 7.

Trouver des polynômes Φ_1 et Φ_3 de degré au plus 3 tels que :

$$\Phi'_1(0) = \Phi'_1(1) = 0 \qquad \Phi_1(0) = 0 \qquad \Phi_1(1) = 1$$
$$\Phi_3(0) = \Phi_3(1) = 0 \qquad \Phi'_3(1) = 1 \qquad \Phi'_3(0) = 0$$

Dans la suite du problème, m est un entier positif fixé, et on pose :

- $h = \dfrac{1}{m}$;
- $t_i = ih$, $\quad i = 0, 1, \ldots, m$;
- pour $i = 0, 1, \ldots, m-1$, $\quad \Phi_{0i}, \Phi_{1i}, \Phi_{2i}, \Phi_{3i}$ sont les polynômes de degré au plus 3 tels que :

$$\begin{array}{llll} \Phi_{0i}(t_i) = 1 & \Phi_{0i}(t_{i+1}) = \Phi'_{0i}(t_i) = \Phi'_{0i}(t_{i+1}) = 0 \\ \Phi_{1i}(t_{i+1}) = 1 & \Phi_{1i}(t_i) = \Phi'_{1i}(t_i) = \Phi'_{1i}(t_{i+1}) = 0 \\ \Phi'_{2i}(t_i) = 1 & \Phi_{2i}(t_i) = \Phi_{2i}(t_{i+1}) = \Phi'_{2i}(t_{i+1}) = 0 \\ \Phi'_{3i}(t_{i+1}) = 1 & \Phi_{3i}(t_i) = \Phi_{3i}(t_{i+1}) = \Phi'_{3i}(t_i) = 0 \end{array}$$

- si $y = (y_i)_{0 \leqslant i \leqslant m} \in \mathbb{R}^{m+1}$ et $\lambda = (\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant m} \in \mathbb{R}^{m+1}$, $f_{y,\lambda}$ désigne la fonction définie sur $[0, 1]$ à valeurs réelles par :

$$f_{y,\lambda}(t_i) = y_i \qquad i = 0, 1, \ldots, m$$

pour $i = 0, 1, \ldots m-1$ et $t \in]t_i, t_{i+1}[$:

$$f_{y,\lambda}(t) = y_i \Phi_{0i}(t) + y_{i+1} \Phi_{1i}(t) + \lambda_i \Phi_{2i}(t) + \lambda_{i+1} \Phi_{3i}(t)$$

Question 8.

Montrer que $f_{y,\lambda}$ est continue et continûment dérivable sur l'intervalle $[0, 1]$.

Question 9.

Écrire un système d'équations, reliant les y_i et λ_i pour $i = 0, 1, \ldots, m$, nécessaire et suffisant pour que $f = f_{y,\lambda}$ satisfasse :

$$\begin{cases} f''(t_0) = 0 \\ f \text{ est deux fois dérivable sur } [0, 1] \\ f''(t_m) = 0 \end{cases}$$

(On pourra observer des relations entre Φ_{ji} et Φ_j $(0 \leqslant j \leqslant 3)$).

Si ce système est satisfait, on dit que $f_{y,\lambda}$ est une fonction « spline ».

*
* *

Dans toute la suite, on pose :

- $m = 10$
- pour $i = 0, 1, \ldots m$, $\quad y_i = (t_i)^2$

Question 10.

Montrer que le système d'équations en λ_i de la question précédente revient au système $A\,x = b$ de la question 5 en posant $\lambda_i = 3\,x_{i+1}$, $i = 0, \ldots m$.

Question 11.

Calculer la fonction spline $f_{y,\lambda}$ aux points $t = 0{,}25$ et $t = 0{,}75$. Comparer à $(0{,}25)^2$ et $(0{,}75)^2$ et commenter.